數學傳播　48卷1期, pp. 96-100

三角多項式的週期：對 47 年前本刊創刊號一問題之回響

林開亮

在高中數學, 我們常常在默認地使用一類結果, 比如 $f(t)=\sin(2t)+\sin(3t)$ 的最小正週期恰好是 $\sin(2t)$ 的最小正週期 $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$ 與 $\sin(3t)$ 的最小正週期 $T_2=\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍數, 即 $T=2\pi$。但估計你鮮有機會看到文獻解釋它。而本刊創刊號所提出的一個綜合難題 "證明 $\cos x+\sin\sqrt{2}x$ 不是週期函數" [3] 則是一類相關的否定問題。二者所考慮的, 都是一類特殊的函數(即標題中所謂的"三角多項式") 的週期性問題。它可以表述如下:

問題 1. 設

$$f(t)=A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+\cdots+A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t),$$

其中 $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ 是實數, 滿足 $A_1^2+B_1^2\neq 0,\ldots,A_n^2+B_n^2\neq 0$, 而 $\omega_1,\ldots,\omega_n$ 爲互異的正數。問: $f(t)$ 是否爲週期函數? 當它爲週期函數時, 最小正週期是多少?

對此問題, 其實有一完整回答, 如下:

定理 1. 設

$$f(t)=A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+\cdots+A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t), \tag{1}$$

其中 $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ 是實數, 滿足 $A_1^2+B_1^2\neq 0,\ldots,A_n^2+B_n^2\neq 0$, 而 $\omega_1,\ldots,\omega_n$ 爲互異的正數。則

(i) $f(t)$ 是週期函數當且僅當對任意的 $i\neq j$ 有 $\frac{\omega_j}{\omega_i}$ 是有理數。

(ii) 當 $f(t)$ 爲週期函數時, $f(t)$ 的最小正週期是 $T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}\,(i=1,\ldots,n)$ 的最小公倍數。

注: 由定理 1, 可以立即給出本文開頭介紹的兩個具體問題的回答。特別地, $\cos x+\sin\sqrt{2}x$ 之所以不是週期函數, 正是因爲 $\sqrt{2}$ 不是有理數。

據筆者瞭解, 作爲一個更像是民間相傳的結果, 定理 1 並非廣爲人知 (尤其是其證明, 對信號處理 (signal processing) 領域的人士來說可能更是如此)。在網上數學討論區、信號處理

討論區, 可以看到許多此類問題, 如 [9, 10]。1977 年, 定理 1 的 (ii) 部分曾經由 Yeshurun 作爲一個猜想提出, 很快由 Waterhouse [11], Myers [8] 給出證明。但他們並不瞭解, 20 年前俄國數學家 Barban [2] 就已經解決了這一問題。他們的證明主要是依據三角函數的線性無關性, 即以下引理:

引理 1. 設 $\omega_1,\ldots,\omega_n$ 爲互異的正數, 若存在實數 $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ 使得

$$A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+\cdots+A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)\equiv 0, \tag{2}$$

則

$$A_1=\cdots=A_n=B_1=\cdots=B_n=0. \tag{3}$$

至於定理 1 的 (i) 部分, 似乎只是在 1997 年莫慶美與林木元合寫的文章 [7] 中才首次予以討論。筆者在 2020 年 [6] 獨立地得到了定理 1, 事後才瞭解到這些文獻。

筆者注意到, Yeshurun [13] 在 1980 年美國數學協會的期刊《數學雜誌》的問題徵解欄再次提出這一問題: 給出定理 1(ii) 的一個無需微積分的證明。他之所以孜孜以求這樣一個證明, 也許是考慮到微積分尚未在普通中學師生的工具箱內。後來, Beigel [4] 對此給出了一個解答。在筆者看來, 這個解答不能令人滿意, 因爲他只考慮了特殊的情況, 而且並未證明定理1(i)。

這個短文之主要目的, 就是給出引理 1 的一個無需微積分的證明。據此, 就可以給出定理 1 的一個中學師生可以接受的證明。

引理 1 的證明: 對 n 用數學歸納法。

首先看 $n=1$ 的情況。設 $\omega_1>0$, 實數 A_1,B_1 使得

$$A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)\equiv 0. \tag{4}$$

在 (4) 式中將 t 代換爲 $t+\frac{\pi}{2\omega_1}$, 就得到

$$A_1[-\sin(\omega_1 t)]+B_1\cos(\omega_1 t)\equiv 0. \tag{5}$$

在 (4), (5) 中令 $t=0$, 就得到

$$A_1=0,\quad B_1=0. \tag{6}$$

從而引理 1 對 $n=1$ 成立。

現在假設 $n=k$ 時, 引理 1 成立。現在考慮 $n=k+1$ 的情況。設 $\omega_1,\ldots,\omega_{k+1}$ 是兩兩不同的正數, 實數 $A_1,\ldots,A_{k+1},B_1,\ldots,B_{k+1}$ 使得

$$A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+\cdots+A_{k+1}\cos(\omega_{k+1} t)+B_{k+1}\sin(\omega_{k+1} t)\equiv 0, \tag{7}$$

對任意給定的實數 s, 在 (7) 式中將 t 代換爲 $t\pm s$, 就分別得到

$$\begin{aligned}&A_1\cos(\omega_1(t+s))+B_1\sin(\omega_1(t+s))+\cdots\\&\quad+A_{k+1}\cos(\omega_{k+1}(t+s))+B_{k+1}\sin(\omega_{k+1}(t+s))\equiv 0,\qquad(8)\\&A_1\cos(\omega_1(t-s))+B_1\sin(\omega_1(t-s))+\cdots\\&\quad+A_{k+1}\cos(\omega_{k+1}(t-s))+B_{k+1}\sin(\omega_{k+1}(t-s))\equiv 0.\qquad(9)\end{aligned}$$

(8) (9) 兩式相加, 並利用和差化積公式, 就得到

$$\begin{aligned}&[A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)]\cos(\omega_1 s)+\cdots\\&\quad+[A_{k+1}\cos(\omega_{k+1}t)+B_{k+1}\sin(\omega_{k+1}t)]\cos(\omega_{k+1}s)\equiv 0.\qquad(10)\end{aligned}$$

(7) 式兩邊同時乘以 $\cos(\omega_{k+1}s)$, 就得到

$$\begin{aligned}&[A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)]\cos(\omega_{k+1} s)+\cdots\\&\quad+[A_{k+1}\cos(\omega_{k+1}t)+B_{k+1}\sin(\omega_{k+1}t)]\cos(\omega_{k+1}s)\equiv 0.\qquad(11)\end{aligned}$$

(11) 式減去 (10) 式, 就得到

$$\begin{aligned}&[A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)][\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_1 s)]\\&\quad+\cdots+[A_k\cos(\omega_k t)+B_k\sin(\omega_k t)][\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_k s)]\equiv 0.\qquad(12)\end{aligned}$$

根據歸納假設 (此時 s 視爲常數), 我們就有 (由於對每個 $s\in\mathbb{R}$ 都成立, 於是得到恒等式)

$$\begin{aligned}&A_1[\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_1 s)]=B_1[\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_1 s)]\\&\quad=\cdots=A_k[\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_k s)]=B_k[\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_k s)]\equiv 0.\qquad(13)\end{aligned}$$

由於 $\omega_{k+1}\neq\omega_1$, 所以必定存在 s 使得 $\cos(\omega_{k+1}s)-\cos(\omega_1 s)\neq 0$ (否則 $\cos(\omega_{k+1}s)=\cos(\omega_1 s)$ 有相同的週期, 進而 $\omega_{k+1}=\omega_1$, 矛盾), 於是就得到 $A_1=B_1=0$。類似地, 可以推出, 對其他 $j=2,\ldots,k$ 有 $A_j=B_j=0$。從而 (7) 式退化爲

$$A_{k+1}\cos(\omega_{k+1}t)+B_{k+1}\sin(\omega_{k+1}t)\equiv 0,\qquad(14)$$

而根據 $n=1$ 情況的結果, 就有 $A_{k+1}=B_{k+1}=0$。引理 1 證畢。 □

注: 以上證明受到 Artin [1, p. 30] 關於特徵標的線性無關性引理的證明之啟發。下面我們給出定理 1 的證明, 其他證明亦可參見 [5]。

定理1的證明: 先證 (i)。充分性是顯然的, 若對任意的 $i\neq j$, $\frac{\omega_j}{\omega_i}$ 是有理數, 則 $T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}(i=1,\ldots,n)$ 有公倍數。這是因爲, 對任意有限多個有理數, 都存在最小公倍數, 並且若這些有理

數都不爲 0, 則最小公倍數也不爲 0。設 $T \neq 0$ 是各個 T_i 的一個公倍數, 則 T 是 $f(t)$ 的週期。

下證必要性: 設 $T \neq 0$ 是 $f(t)$ 的週期, 則有

$$f(t+T) - f(t) = 0. \tag{15}$$

令

$$f_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

則我們可以把 (15) 重新寫爲

$$[f_1(t+T) - f_1(t)] + \cdots + [f_n(t+T) - f_n(t)] = 0. \tag{17}$$

注意

$$\begin{aligned} f_i(t+T) - f_i(t) =& A_i \cos(\omega_i(t+T)) + B_i \sin(\omega_i(t+T)) - A_i \cos(\omega_i t) - B_i \sin(\omega_i t) \\ =& A_i[\cos(\omega_i T)\cos(\omega_i t) - \sin(\omega_i T)\sin(\omega_i t)] \\ &+ B_i[\cos(\omega_i T)\sin(\omega_i t) + \sin(\omega_i T)\cos(\omega_i t)] - A_i \cos(\omega_i t) - B_i \sin(\omega_i t) \\ =& \Big(A_i[\cos(\omega_i T) - 1] + B_i \sin(\omega_i T)\Big)\cos(\omega_i t) \\ &+ \Big(B_i[\cos(\omega_i T) - 1] - A_i \sin(\omega_i T)\Big)\sin(\omega_i t) \end{aligned} \tag{18}$$

根據引理1, 對 $i = 1, \ldots, n$ 有

$$A_i[\cos(\omega_i T) - 1] + B_i \sin(\omega_i T) = 0, \tag{19}$$

$$B_i[\cos(\omega_i T) - 1] - A_i \sin(\omega_i T) = 0. \tag{20}$$

(19) 乘以 A_i, (20) 乘以 B_i, 將所得兩式相加就得到

$$(A_i^2 + B_i^2)[\cos(\omega_i T) - 1] = 0. \tag{21}$$

由於 $(A_i^2 + B_i^2) \neq 0$, 我們得到

$$[\cos(\omega_i T) - 1] = 0. \tag{22}$$

即

$$\cos(\omega_i T) = 1. \tag{23}$$

從而, 對每個 $i = 1, \ldots, n$ 有

$$T_i \mid T, \tag{24}$$

其中 $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ 是 $f_i(t)$ 的最小正週期。從而 T 是 $T_i(i=1,\ldots,n)$ 的公倍數。由此推出, $T_i(i=1,\ldots,n)$ 彼此可公度, 進而對任意的 $i \neq j$, $\frac{\omega_j}{\omega_i}$ 是有理數。(i) 的必要性得證。

(ii) 由 (i) 的必要性證明 (特別是 (24) 式) 可見, 當 $f(t)$ 有週期 T 時, T 是各個 $T_i(i=1,\ldots,n)$ 的公倍數。這就推出, 當 $f(t)$ 爲週期函數時, $f(t)$ 的最小正週期恰好是各個 $T_i(i=1,\ldots,n)$ 的最小公倍數。定理1證畢。 □

利用定理1和引理1, 還可以討論形如 (1) 的兩個三角多項式 $f_1(t), f_2(t)$ 的和、差、積、商的週期。此處從略。考慮到問題1是如此基本, 以至於筆者猜測, 這些結果早就見諸文獻, 如 Euler 的著作, 還望方家指教。

致謝: 感謝審稿老師對初稿提出寶貴意見!

参考文獻

1. E. Artin。伽羅瓦理論。李同孚譯, 上海科學技術出版社, 1979。
2. M. B. Barban, 關於三角函數週期的求法。1957(5), 中學教學, 94-96。
3. 本刊編輯部。E0006 證明 $\cos x + \sin\sqrt{2}x$ 不是週期函數。數學傳播季刊, 1(2), 155-157, 1976。
4. R. Beigel, Fundamental period, Solution to Problem 1095, *Mathematics Magazine*, 54(3), 142-143, 1981.
5. J. Caveny and W. Page, The fundamental periods of sums of periodic functions, *The College Mathematics Journal*, 20(1), 32-41, 1989.
6. 林開亮。正弦函數之和是週期函數嗎?, 好玩的數學, 2020 年 12 月 16 日。
7. 莫慶美, 林木元。一類三角多項式的週期。梧州師專學報, 7(02), 24-26, 1997。
8. L. F. Myers, Resolution of Yeshurun's conjecture with regard to periodic functions, *Int. J. Math. Educ. Sci. Techno.*, 10(2), 281-282, 1979.
9. Twenty-six colours, Fundamental period of a trig polynomial.
10. user33568, Rationally related frequencies and the Fourier Series representation.
11. W. C. Waterhouse, Letter to the editor, *Int. J. Math. Educ. Sci. Techno.*, 9(3), 375, 1978.
12. S. Yeshurun, A conjecture with regard to periodic functions and its significance: mathematics education versus teaching of mathematics, *Int. J. Math. Educ. Sci. Techno.*, 8(4), 411-415, 1977.
13. S. Yeshurun, Problem 1095, *Mathematics Magazine*, 53 (2), 112, 1980.

—本文作者任教中國西北農林科技大學理學院—